

ZUR PERIODISCHEN SPLINE-INTERPOLATION

DISSERTATION

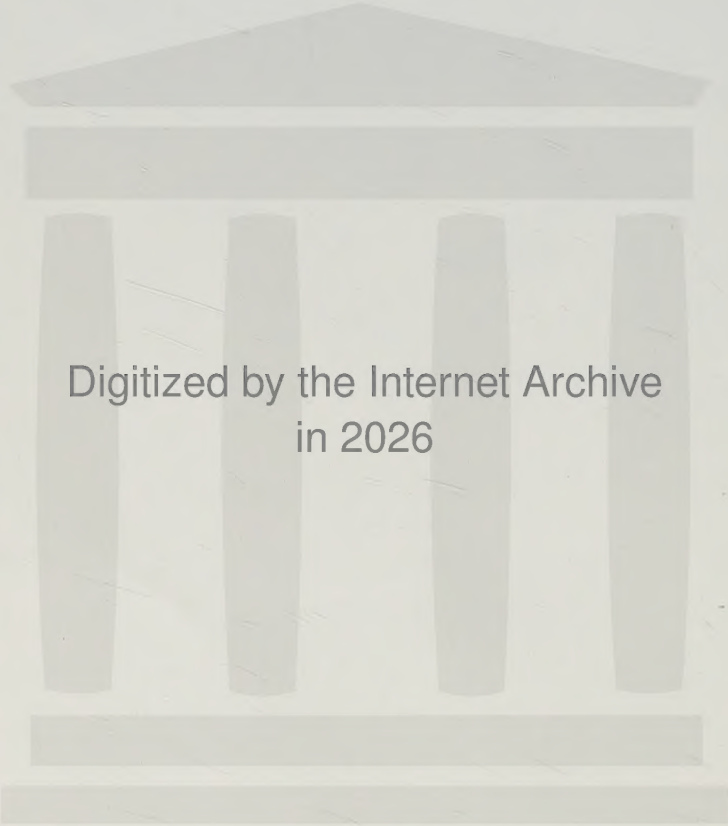
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Friedrich Krinzeß

aus Stuttgart

Bochum 1969



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546607_0032

ZUR PERIODISCHEN SPLINE-INTERPOLATION

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Friedrich Krinzeß
aus Stuttgart

Bochum 1969



Dissertation eingereicht am: 2. 7. 1969

Tag der mündlichen Prüfung: 10. 11. 1969

Dekan: Prof. Dr. Günter Ewald

Referent: Prof. Dr. Hartmut Ehlich

Korreferent: Prof. Dr. Wilhelm Niethammer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
§ 1 Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der periodischen Spline-Interpolation	7
§ 2 Eigenschaften der Matrix $G(\Delta x_v)$	14
§ 3 Periodische Spline-Interpolation in äquidistanten Knoten	26
§ 4 Über die Eigenwerte und Eigenvektoren von $G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)$	47
§ 5 Die Unterdeterminanten von $G(\Delta x_v)$	51
§ 6 Periodische Spline-Interpolation in nicht notwendig äquidistanten Knoten	59
§ 7 Periodische quadratische Spline- Interpolation	64
Literaturverzeichnis	68

Einleitung

Es sei

$$(0.1) \quad \dots x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_\nu < \dots$$

eine gegebene unendliche Folge von reellen Zahlen derart, daß $\lim x_\nu = \pm\infty$ wenn $\nu \rightarrow \pm\infty$ und es sei k eine gegebene natürliche Zahl. Unter einer k -Spline-Funktion, die die Knoten (0.1) hat, versteht man eine reellwertige Funktion, die auf der ganzen reellen Zahlengeraden definiert ist, $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar ist und sich in jedem Intervall $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ ($\nu \in \mathbb{Z}$) als ein Polynom von höchstens k -tem Grade darstellen läßt. Der Begriff der Spline-Funktion taucht wohl erstmalig bei I. J. SCHOENBERG [9] auf und geht auf ein mechanisches Hilfsmittel zurück, das technische Zeichner gerne verwenden, um glatte Kurven durch vorgegebene Punkte zu zeichnen. Tatsächlich wurden Spline-Funktionen schon von L. COLLATZ und W. QUADE [3] im Jahre 1938 verwendet und dort Parabelzüge genannt.

Es gelte jetzt für die Knoten

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < L \quad (L > 0), \quad (0.2)$$

$$x_{v+rN} = x_v + rL \quad (0 \leq v \leq N-1; r \in \mathbb{Z})$$

und zusätzlich seien noch beliebige reelle Zahlen y_v ($0 \leq v \leq N-1$) mit $y_{v+sN} = y_v$ ($0 \leq v \leq N-1; s \in \mathbb{Z}$) gegeben. Existiert eine k -Spline-Funktion $g_k(x)$ mit der Periode $L > 0$ und den Knoten (0.2), die $g(x_v) = y_v$ ($v \in \mathbb{Z}$) erfüllt, so heißt sie periodische k -Spline-Interpolationsfunktion.

Es ergibt sich die Frage, ob eine solche Funktion immer existiert und ob sie eindeutig bestimmt ist. Wir zeigen, daß diese Frage gleichbedeutend mit der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems der Form

$$(0.3) \quad (E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0))u = \sum_{\mu=0}^{N-2} G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_{\mu+1})c_{\mu} + c_{N-1}$$

ist. Hierbei sind die $G(\Delta x_v)$ ($v = 0, 1, \dots, N-1$) $(k-1, k-1)$ -Matrizen, deren Elemente von $\Delta x_v = x_{v+1} - x_v$ ($v = 0, 1, \dots, N-1$) abhängen. Wir erhalten im Falle der Lösbarkeit einen Vektor u_0 , der in seiner i -ten Komponente die i -te Ableitung der k -Spline-Inter-

polationsfunktion an der Stelle x_0 enthält und die Ableitungen an den übrigen Stellen zu berechnen gestattet.

I. J. SCHOENBERG [10] bewies die Existenz und Eindeutigkeit der periodischen k -Spline-Interpolation für ungerades k mit einer von der unseren verschiedenen Methode unter Verwendung von fundamentalen k -Spline-Funktionen. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON und J. L. WALSH [1], [2] erhielten ein lineares Gleichungssystem für die von rechts genommenen k -ten Ableitungen der $g_k(x)$ in den Punkten x_v , allerdings nur für $N \geq k$. Die periodische k -Spline-Interpolation für gerades k wird in [1], [2] und [10] nicht untersucht. Es wird dort lediglich erwähnt, daß in diesem Fall im allgemeinen keine periodische Spline-Interpolationsfunktion existiert.

Bei unserer Methode ist es wegen (0.3) von besonderem Interesse, ob die Matrix

$$E = G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)$$

singulär ist oder nicht. In § 2 untersuchen wir die Faktoren $G(\Delta x_v)$ ($v = 0, 1, \dots, N-1$). Wir finden, daß $G^T(\Delta x_v)$ und daß $G(\Delta x_v)$ symmetrisch zur Nebendiagonalen sind und in derselben Ähnlichkeitsklasse liegen. Die Transformationsmatrix, die die Ähnlichkeits-

transformation bewirkt, hat dabei die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} \bigcirc & & 1 & 1 \\ & \ddots & & \\ 1 & & \bigcirc & \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Determinante und der Inversen von $G(\Delta x_v)$ geben wir in § 2 eine Zerlegung von $G(\Delta x_v)$ in ein Produkt von Dreiecksmatrizen der Form

$$G(\Delta x_v) = L(\Delta x_v) D R(\Delta x_v)$$

an. Hierbei sind $L(\Delta x_v)$ und $R(\Delta x_v)$ linke untere Dreiecksmatrizen und D eine rechte obere Dreiecksmatrix. Außerdem gilt

$$L^{-1}(\Delta x_v) = W R(\Delta x_v) W$$

und

$$R^{-1}(\Delta x_v) = W L(\Delta x_v) W,$$

wobei W eine orthogonale Matrix der Form

$$W = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \bigcirc \\ \bigcirc & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & (-1)^{k-1} \end{pmatrix}$$

ist. Schließlich zeigt sich, daß

$$G^{-1}(\Delta x_v) = W G(\Delta x_v) W^{-1}$$

gilt, d. h. $G^{-1}(\Delta x_v)$ und $G(\Delta x_v)$ zueinander ähnlich sind.

In § 3 gehen wir auf die Eigenwerte der Matrix $G(\Delta x_v)$ genauer ein und zeigen, daß sie nicht von Δx_v abhängen. Für das charakteristische Polynom

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \det(\lambda E - G(\Delta x_v))$$

geben wir eine Rekursionsformel an. Aus ihr entnehmen wir, daß $G(\Delta x_v)$ nur negative und lauter verschiedene Eigenwerte besitzt. Nur für gerades k hat die $(k-1, k-1)$ -Matrix $G(\Delta x_v)$ den Eigenwert -1 . Damit bekommen wir folgendes Ergebnis, das von L. COLLATZ, W. QUADE [3] und H. EHLICH [4] mit Hilfe anderer Methoden bewiesen wurde:

Bei äquidistanter Unterteilung der reellen Zahlengeraden durch $x_0 + rL/N$ ($r \in \mathbb{Z}$) existiert für den Fall, daß N und k nicht beide gerade sind, stets eine eindeutig bestimmte periodische k -Spline-Interpolationsfunktion.

Wir zeigen weiter, daß bei gewissen Permutationen in der Reihenfolge der Faktoren $G(\Delta x_v)$ die Deter-

minante von $E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)$ sich nicht ändert. Über die Eigenwerte von $G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)$ läßt sich die Aussage machen, daß mit λ auch λ^{-1} Eigenwert von $G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)$ ist.

Aus der Tatsache, daß sämtliche Unterdeterminanten von $-G(\Delta x_v)$ nichtnegativ sind und einem Ergebnis von I. J. SCHOENBERG [10] beweisen wir für allgemeine Knoten:

Bei einer Unterteilung der reellen Zahlengeraden durch (0.2) existiert für den Fall, daß N und k nicht beide gerade sind, stets eine eindeutig bestimmte periodische k -Spline-Interpolationsfunktion.

Zum Schluß geben wir unter Verwendung von (0.3) eine explizite Formel für die periodische quadratische Spline-Interpolation an.

Herrn Prof. Dr. Hartmut Ehlich möchte ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge danken und auch Herrn Prof. Dr. Wilhelm Niethammer für anregende Diskussionen.

§ 1 Eine notwendige und hinreichende Bedingung

für die Existenz und Eindeutigkeit

der periodischen Spline-Interpolation

Wir betrachten den Polygonzug auf dem die Punkte (x_v, y_v) ($v \in \mathbb{Z}$) liegen und der in diesen auch höchstens Ecken besitzt und stellen fest, daß dieser Polygonzug die einzige periodische 1-Spline-Funktion ist, für die $g_1(x_v) = y_v$ ($v \in \mathbb{Z}$) gilt. Deshalb wollen wir von nun an die periodische k-Spline-Interpolation für $k \geq 2$ behandeln. Dabei ist es wichtig, ob eine solche Funktion immer existiert und ob sie eindeutig bestimmt ist. Dazu beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 1

Es seien $k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) reelle Zahlen

$\xi_i^{(v)}$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) und $\xi_0^{(v+1)}$ gegeben.

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $P_k(x)$ von höchstens k-tem Grade so, daß für $x_v \neq x_{v+1}$ gilt

$$P_k^{(i)}(x_v) = \xi_i^{(v)} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1)$$

und

$$P_k(x_{v+1}) = \xi_0^{(v+1)} .$$

Beweis:

Die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Polynoms folgt aus M. MÜLLER [7].

Wie sieht nun das Polynom mit den in Hilfssatz 1 geforderten Eigenschaften aus? Dazu betrachten wir das folgende Polynom

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-x_v)^j}{j!} \xi_j^{(v)} \\ (1.1) \\ + \frac{1}{(\Delta x_v)^k} \left[\xi_0^{(v+1)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} \xi_j^{(v)} \right] (x-x_v)^k ,$$

in dem $\Delta x_v = x_{v+1} - x_v$ gesetzt ist. Damit bekommen wir für $x = x_v$ und $x = x_{v+1}$ die Beziehungen

$$P_k(x_v) = \xi_0^{(v)} \text{ und } P_k(x_{v+1}) = \xi_0^{(v+1)} .$$

Für die i -te Ableitung von $P_k(x)$ folgt

$$P_k^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{j!} (x-x_v)^{j-i} \xi_j^{(v)} \\ + \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{(\Delta x_v)^k} \left[\xi_0^{(v+1)} \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} \xi_j^{(v)} \right] (x-x_v)^{k-i} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) .$$

An der Stelle x_v gilt für diese Ableitung

$$P_k^{(i)}(x_v) = \xi_i^{(v)} .$$

Das Polynom (1.1) hat also die in Hilfssatz 1 geforderten Eigenschaften. Wie wir wissen, ist $P_k(x)$ eindeutig bestimmt; daher sind es auch die Ableitungen an der Stelle x_{v+1} , die die Gestalt

$$\begin{aligned} P_k^{(i)}(x_{v+1}) &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{j!} (\Delta x_v)^{j-i} \xi_j^{(v)} \\ &+ \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{(\Delta x_v)^k} \left[\xi_0^{(v+1)} \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} \xi_j^{(v)} \right] (\Delta x_v)^{k-i} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

haben. Unter der Verwendung von Binomialkoeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned} P_k^{(i)}(x_{v+1}) &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j!}{j!} \left[\binom{j}{i} - \binom{k}{i} \right] (\Delta x_v)^{j-i} \xi_j^{(v)} \\ (1.2) \quad &+ \binom{k}{i} \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} \left[\xi_0^{(v+1)} - \xi_0^{(v)} \right] . \end{aligned}$$

Zur Abkürzung werde

$$u_\mu^T = (\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)}, \dots, \xi_{k-1}^{(\mu)}) \quad (\mu = v, v+1)$$

gesetzt. Mit dem Vektor

$$c_v^T = \left(i! \binom{k}{i} \frac{\xi_0^{(v+1)} - \xi_0^{(v)}}{(\Delta x_v)^i} \right)_{1 \leq i \leq k-1}$$

und der $(k-1, k-1)$ -Matrix

$$(1.3) \quad G(\Delta x_v) = \left(\frac{i!}{j!} \left[\binom{j}{i} - \binom{k}{i} \right] (\Delta x_v)^{j-i} \right)$$

$$1 \leq i \leq k-1, \quad 1 \leq j \leq k-1$$

können wir jetzt für die Gleichung (1.2) kürzer

$$(1.4) \quad u_{v+1} = G(\Delta x_v) u_v + c_v$$

schreiben.

Satz 1

Die Bedingung

$$(1.5) \quad \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) \neq 0$$

ist notwendig und hinreichend für die Existenz und Eindeutigkeit einer periodischen k -Spline-Interpolationsfunktion $g_k(x)$ ($k \geq 2$), die die Knoten $(0,2)$ besitzt und für die $g_k(x_v) = y_v$ ($v \in \mathbb{Z}$), sowie $y_{v+sN} = y_v$ ($s \in \mathbb{Z}$) mit beliebigen reellen Zahlen y_v gilt.

Beweis:

Eine periodische k-Spline-Interpolationsfunktion, die den in Satz 1 angegebenen Bedingungen genügt, existiert sicher genau dann, wenn es Polynome

$g_{k,v}(x)$ ($v = 0, 1, \dots, N-1$) von höchstens k-tem Grade mit $g_{k,v}(x) = g_k(x)$ für $x_v \leq x \leq x_{v+1}$ gibt, die die Eigenschaften

$$1. \quad g_{k,v}^{(i)}(x_{v+1}) = g_{k,v+1}^{(i)}(x_{v+1}) \quad (v = 0, 1, \dots, N-2; \\ i = 0, 1, \dots, k-1)$$

und

$$2. \quad g_{k,0}^{(i)}(x_0) = g_{k,N-1}^{(i)}(x_N) \quad (i = 0, 1, \dots, k-1)$$

haben.

In x_0 seien jetzt beliebige Ableitungswerte $\xi_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) vorgeschrieben, die wir zum $(k-1)$ -dimensionalen Vektor $u_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_{k-1}^{(0)})$ zusammenfassen. Durch wiederholte Anwendung von (1.4) erhalten wir dann an der Stelle x_v einen Vektor

$$u_v = G(\Delta x_{v-1})G(\Delta x_{v-2}) \dots G(\Delta x_0)u_0 \\ + \sum_{\mu=0}^{v-2} G(\Delta x_{v-1})G(\Delta x_{v-2}) \dots G(\Delta x_{\mu+1})c_\mu + c_{v-1} \\ (v = 1, 2, \dots, N) .$$

Der Beweis dieser Tatsache ergibt sich leicht mit Hilfe von (1.4) und durch vollständige Induktion

nach v . Für die Stelle x_N berechnen wir nach obiger Gleichung

$$u_N = G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)u_0$$

(1.6)

$$+ \sum_{\mu=0}^{N-2} G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_{\mu+1})c_\mu + c_{N-1} \quad .$$

Vermöge (1.6) wird also jedem beliebigen Vektor $u_0 \in \mathbb{R}^{k-1}$ eindeutig ein Vektor $u_N \in \mathbb{R}^{k-1}$ zugeordnet. Die Eindeutigkeit folgt aus Hilfssatz 1. Setzen wir nun den Wert von $g_{k,v}^{(i)}(x_v)$ gleich der i -ten Komponente von u_v , so ergibt sich, daß die obige Eigenschaft 1 erfüllt ist, wenn für $\xi_0^{(q)}$ in c_μ die Werte y_q eingesetzt werden. Die Eigenschaft 2 ist genau dann erfüllt, wenn das lineare Gleichungssystem (0.3)

$$(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))u$$

$$= \sum_{\mu=0}^{N-2} G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_{\mu+1})c_\mu + c_{N-1}$$

lösbar ist. Damit ist die Äquivalenz der Existenz einer periodischen k -Spline-Interpolationsfunktion $g_k(x)$ der in Satz 1 genannten Art zu der Bedingung (1.5) gezeigt. Zum Beweis der Eindeutigkeit bemerken wir nochmals, daß dem Vektor $u_0 \in \mathbb{R}^{k-1}$ vermöge

(1.6) eindeutig ein Vektor $u_N \in \mathbb{R}^{k-1}$ zugeordnet wird. Mit dem aus (0.3) erhaltenen Lösungsvektor ist die k-Spline-Interpolationsfunktion also eindeutig bestimmt, wenn wir $g_k^{(i)}(x_0)$ gleich der i-ten Komponente dieses Lösungsvektors setzen. Wegen (1.5) gibt es aber genau einen Lösungsvektor von (0.3).

Lassen wir im Beweis zu Satz 1 die Eigenschaft 2, d. h. die Periodizität, fort und beschränken uns auf die Knoten x_v ($v = 0, 1, \dots, N-1$) so stellt sich uns das allgemeine k-Spline-Interpolationsproblem. Nach (1.6) ist dieses Problem immer lösbar. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $k-1$, da die Werte $g_k^{(i)}(x_0)$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) frei wählbar sind.

§ 2 Eigenschaften der Matrix $G(\Delta x_v)$

Satz 2

Die Matrizen $G(\Delta x_v)$ sind symmetrisch zur Nebendiagonalen.

Beweis:

Wir drücken die Binomialkoeffizienten, die in der Matrix $G(\Delta x_v)$ auftreten, durch Fakultäten aus und bezeichnen die Elemente von $G(\Delta x_v)$ mit $g_{i,j}(\Delta x_v)$. Es zeigt sich, daß $g_{k-j,k-i}(\Delta x_v) = g_{i,j}(\Delta x_v)$ ist. Die Matrix $G(\Delta x_v)$ ist also symmetrisch zur Nebendiagonalen.

Satz 3

Ist die (n,n) -Matrix A symmetrisch zur Nebendiagonalen, so gilt

$$A^T = MAM \quad .$$

Die (n,n) -Matrix M hat die Elemente

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Beweis:

Wir berechnen zuerst das Produkt $B = MA$. Das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von B ist

$$b_{i,j} = a_{n+1-i,j} \quad .$$

Multiplikation der Matrix B von rechts mit M ergibt für die Elemente von $C = MAM$

$$c_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j} \quad .$$

Da A symmetrisch zur Nebendiagonalen ist, können wir

$$C = MAM = (a_{j,i}) \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad 1 \leq j \leq k-1$$

schreiben und die Behauptung ist bewiesen.

Als nächstes geben wir eine Dreieckszerlegung von $G(\Delta x_v)$ an. Dazu wird der folgende Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz 2

Es seien m und n zwei natürliche Zahlen mit $m \leq n$ und l eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt die

Beziehung

$$(2.1) \quad \sum_{v=m}^n \binom{v}{1} = \binom{n+1}{1+1} - \binom{m}{1+1} .$$

Beweis:

Für $n = m$ ist (2.1) richtig. Nehmen wir an, (2.1) sei für alle n mit $m \leq n \leq r$ schon bewiesen, dann ist noch zu zeigen, daß (2.1) auch für $n = r+1$ richtig ist. Mit

$$\sum_{v=m}^{r+1} \binom{v}{1} = \sum_{v=m}^r \binom{v}{1} + \binom{r+1}{1}$$

folgt unter Verwendung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \sum_{v=m}^{r+1} \binom{v}{1} &= \binom{r+1}{1+1} - \binom{m}{1+1} + \binom{r+1}{1} \\ &= \binom{r+2}{1+1} - \binom{m}{1+1} . \end{aligned}$$

Die Beziehung (2.1) gilt also allgemein.

Satz 4

Es gibt eine Dreieckszerlegung der $(k-1, k-1)$ -Matrix $G(\Delta x_v)$

$$(2.2) \quad G(\Delta x_v) = L(\Delta x_v) D R(\Delta x_v)$$

mit den $(k-1, k-1)$ -Dreiecksmatrizen

$$D = (d_{i,j}) \quad (1 \leq i \leq k-1, \quad 1 \leq j \leq k-1),$$

$$L(\Delta x_v) = (l_{i,j}(\Delta x_v)) \quad (1 \leq i \leq k-1, \quad 1 \leq j \leq k-1) \text{ und}$$

$$R(\Delta x_v) = (r_{i,j}(\Delta x_v)) \quad (1 \leq i \leq k-1, \quad 1 \leq j \leq k-1),$$

deren Elemente folgendermaßen aussehen:

$$d_{i,j} = -\binom{j-1}{i-1},$$

$$l_{i,j}(\Delta x_v) = \begin{cases} \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} & \text{für } i = j \text{ und } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$r_{i,j}(\Delta x_v) = \begin{cases} \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} & \text{für } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die Determinante von $G(\Delta x_v)$ gilt die Gleichung

$$\det G(\Delta x_v) = (-1)^{k-1}.$$

Beweis:

Wir betrachten zuerst das Produkt $A = L(\Delta x_v)D$.

Das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von A ist für $i = 1$

$$a_{i,j} = - \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} \binom{j-1}{i-1}$$

und für $i > 1$

$$a_{i,j} = - \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} \left[\binom{j-1}{i-2} + \binom{j-1}{i-1} \right] .$$

Die Matrix $A = L(\Delta x_v)D$ hat also die Gestalt

$$A = L(\Delta x_v)D = \left(- \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} \binom{j}{i-1} \right)_{1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1}$$

Wie sieht nun das Produkt $L(\Delta x_v)DR(\Delta x_v)$ aus? Unter Verwendung von $A = L(\Delta x_v)D$ und Multiplikation von rechts mit $R(\Delta x_v)$ ergibt sich

$$L(\Delta x_v)DR(\Delta x_v) = \left(- \sum_{\mu=j}^{k-1} \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} \binom{\mu}{i-1} \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k-1, \\ 1 \leq j \leq k-1}}$$

oder

$$L(\Delta x_v)DR(\Delta x_v) = \left(- \frac{i!}{j!} (\Delta x_v)^{j-i} \sum_{\mu=j}^{k-1} \binom{\mu}{i-1} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k-1, \\ 1 \leq j \leq k-1}} .$$

Hier können wir Hilfssatz 2 verwenden und erhalten

$$L(\Delta x_v)DR(\Delta x_v) = \left(\frac{i!}{j!} (\Delta x_v)^{j-i} \left[\binom{j}{i} - \binom{k}{i} \right] \right)_{\substack{1 \leq i \leq k-1, \\ 1 \leq j \leq k-1}} .$$

Die Beziehung (2.2) ist damit bewiesen.

Um den zweiten Teil der in Satz 4 aufgestellten Behauptung zu beweisen, verwenden wir das Multiplikationstheorem für Determinanten. Danach ist

$$\det G(\Delta x_v) = \det L(\Delta x_v) \det D \det R(\Delta x_v) .$$

Da $L(\Delta x_v)$, D und $R(\Delta x_v)$ Dreiecksmatrizen sind, erhalten wir deren Determinanten als Produkte ihrer Hauptdiagonalelemente. Das ergibt

$$\det G(\Delta x_v) = \prod_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu!}{(\Delta x_v)^\mu} (-1)^{k-1} \prod_{\mu=1}^{k-1} \frac{(\Delta x_v)^\mu}{\mu!}$$

oder

$$\det G(\Delta x_v) = (-1)^{k-1} .$$

Hilfssatz 3

Es gelten die folgenden Gleichungen

$$L^{-1}(\Delta x_v) = WR(\Delta x_v)W ,$$

$$R^{-1}(\Delta x_v) = WL(\Delta x_v)W$$

und

$$D^{-1} = WDW .$$

Die $(k-1, k-1)$ -Matrix W hat die Gestalt

$$W = ((-1)^i \delta_{i,j})_{1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1}.$$

Beweis:

Die Elemente in der ersten Zeile von $A = L(\Delta x_v)W$ lauten

$$a_{1,j} = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta x_v} & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{für } j > 1 \end{cases}.$$

Für $i > 1$ erhalten wir

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^i \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} & \text{für } i = j \\ (-1)^{i-1} \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} & \text{für } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ergibt sich

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^j \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} & \text{für } i = j \text{ und } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

da für $i = 1$ der Fall $i = j+1$ nicht auftreten kann.

Die Produktmatrix $B = R(\Delta x_v)W$ lautet

$$(b_{i,j})_{1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1} = \begin{cases} (-1)^j \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} & \text{für } j \leq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit sind die Elemente von $C = AB = L(\Delta x_v)WR(\Delta x_v)W$

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{für } i = 1, j > 1 \\ 0 & \text{für } i > 1, j < i \\ 1 & \text{für } i > 1, j = i \\ 0 & \text{für } i > 1, j > i \end{cases} .$$

das bedeutet aber, daß

$$C = L(\Delta x_v)WR(\Delta x_v)W = E$$

ist. Da man aus der Dreiecksgestalt der Matrix $L(\Delta x_v)$ leicht sehen kann, daß sie nichtsingulär ist, liefert Linksmultiplikation von $L^{-1}(\Delta x_v)$ mit der obigen Gleichung

$$L^{-1}(\Delta x_v) = WR(\Delta x_v)W .$$

W ist als Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente sämtlich von Null verschieden sind, nicht-singulär. Multiplizieren wir $L^{-1}(\Delta x_v) = WR(\Delta x_v)W$ von links und rechts mit W^{-1} , so bekommen wir

$$R(\Delta x_v) = W^{-1}L^{-1}(\Delta x_v)W^{-1} \quad .$$

Da man auch die Matrix $R(\Delta x_v)$ invertieren kann, wie sich aus ihrer Dreiecksgestalt ablesen läßt, folgt

$$R^{-1}(\Delta x_v) = WL(\Delta x_v)W \quad .$$

Zum Nachweis von $D^{-1} = WDW$ berechnen wir zunächst die $(k-1, k-1)$ -Matrix WD . Es ist

$$WD = \left(- \sum_{\mu=1}^{k-1} (-1)^i \delta_{i,\mu} \binom{j-1}{\mu-1} \right)_{1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1}$$

oder, nach Definition des Kroneckersymbols,

$$WD = \left((-1)^{i+1} \binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1} \quad .$$

Multiplizieren wir WD mit sich selbst, so ergibt sich

$$H = (WD)^2 = \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{\mu-1}{i-1} (-1)^{\mu+1} \binom{j-1}{\mu-1} \right)_{1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1} \quad .$$

Da die Binomialkoeffizienten nur für $\mu > i$ und $j > \mu$ von Null verschieden sind, lauten die Elemente von H

$$h_{i,j} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^j \frac{(\mu-1)!}{(i-1)!(\mu-i)!} \frac{(j-1)!}{(\mu-1)!(j-\mu)!} (-1)^{\mu-i} & \text{für } i < j \\ 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases} .$$

Eine einfache Umformung ergibt

$$h_{i,j} = \begin{cases} \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \sum_{\mu=1}^j \frac{(j-i)!}{(j-\mu)!(\mu-i)!} (-1)^{\mu-i} & \text{für } i < j \\ 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases} .$$

Mit Hilfe des Polynomialehrsatzes bekommen wir schließlich

$$h_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases} .$$

Wir haben also

$$WDWD = E$$

erhalten. Die Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit D^{-1} ist erlaubt, da D wegen seiner Dreiecksgestalt ebenfalls nichtsingulär ist. Sie liefert

$$D^{-1} = WDW \quad .$$

Satz 5

Die Inverse der Matrix $G(\Delta x_v)$ ist

$$G^{-1}(\Delta x_v) = WG(\Delta x_v)W \quad .$$

Beweis:

Nach Satz 4 können wir

$$G^{-1}(\Delta x_v) = (L(\Delta x_v)DR(\Delta x_v))^{-1} = R^{-1}(\Delta x_v)D^{-1}L^{-1}(\Delta x_v)$$

schreiben. Unter Verwendung von Hilfssatz 3 wird daraus

$$G^{-1}(\Delta x_v) = WL(\Delta x_v)WWDWWR(\Delta x_v)W$$

und unter Berücksichtigung von $WW = E$

$$G^{-1}(\Delta x_v) = WL(\Delta x_v)DR(\Delta x_v)W = WG(\Delta x_v)W \quad .$$

Die Behauptung ist damit bewiesen.

§ 3 Periodische Spline-Interpolation

in äquidistanten Knoten

Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer periodischen Spline-Interpolationsfunktion in äquidistanten Knoten betrachten wir die Eigenwerte von $G(\Delta x_v)$.

Satz 6

Die Eigenwerte von $G(\Delta x_v)$ ($k \geq 2$) hängen nicht von Δx_v ab. Für das charakteristische Polynom

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \det(\lambda E - G(\Delta x_v))$$

ergibt sich die Rekursionsformel

$$\chi_0(\lambda) \equiv 1 \quad ;$$

(3.1)

$$\chi_{k-1}(\lambda) = ((k-1)\lambda+1) \chi_{k-2}(\lambda) + \lambda(1-\lambda) \chi'_{k-2}(\lambda) \quad .$$

Sämtliche Eigenwerte von $G(\Delta x_v)$ sind einfach, negativ und nur für gerades k ist der Wert -1 Eigenwert von $G(\Delta x_v)$.

Beweis:

Mit Hilfe von Satz 4 können wir

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \det(\lambda L(\Delta x_v) L^{-1}(\Delta x_v) R^{-1}(\Delta x_v) R(\Delta x_v) - L(\Delta x_v) D R(\Delta x_v))$$

schreiben. Also gilt

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \det L(\Delta x_v) (\lambda L^{-1}(\Delta x_v) R^{-1}(\Delta x_v) - D) R(\Delta x_v) \quad .$$

Unter Verwendung von Hilfssatz 3 und Berücksichtigung der Tatsache, daß $\det L(\Delta x_v) \det R(\Delta x_v) = 1$ ist, ergibt sich

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \det(\lambda W R(\Delta x_v) L(\Delta x_v) W - D) \quad .$$

Zur Berechnung des Matrizenproduktes $H = W R(\Delta x_v) L(\Delta x_v) W$ spalten wir dieses auf in $B = W R(\Delta x_v)$ mit

$$b_{i,j} = \begin{cases} (-1)^i \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} & \text{für } j \leq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $C = L(\Delta x_v) W$ mit

$$c_{i,j} = \begin{cases} (-1)^j \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} & \text{für } i = j \text{ und } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für die Elemente von $H = WR(\Delta x_v)L(\Delta x_v)W$ erhalten wir dann

$$h_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, j = 1 \\ 0 & \text{für } i = 1, j > 1 \\ 2 (-1)^{i+j} & \text{für } i > j \\ 1 & \text{für } i = j, i > 1 \\ 0 & \text{für } i < j, i > 1 \end{cases}$$

oder kürzer

$$h_{i,j} = \begin{cases} 2 (-1)^{i+j} & \text{für } i > j \\ 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i < j \end{cases} .$$

Wir sehen, daß weder $H = WR(\Delta x_v)L(\Delta x_v)W$ noch D von Δx_v abhängen. Hieraus folgt, daß auch

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \det(\lambda WR(\Delta x_v)L(\Delta x_v)W - D)$$

von Δx_v unabhängig ist.

Die Elemente der Matrix $\lambda WR(\Delta x_v) L(\Delta x_v) W - D$ lassen sich nach diesen Vorarbeiten explizit angeben. Es ist

$$\lambda h_{i,j} - d_{i,j} = \begin{cases} 2 (-1)^{i+j} \lambda & \text{für } i > j \\ \lambda + 1 & \text{für } i = j \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{für } i < j \end{cases} .$$

$\chi_{k-1}(\lambda)$ ändert sich sicher nicht nach Multiplikation von $\lambda WR(\Delta x_v) L(\Delta x_v) W - D$ mit einer Matrix L , wobei

$$l_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ und } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Matrix $A = L(\lambda WR(\Delta x_v) L(\Delta x_v) W - D)$ hat dann die Elemente

$$a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i-1} & \text{für } i < j \\ i + \lambda & \text{für } i = j \\ 1 - \lambda & \text{für } i = j+1 \\ 0 & \text{für } i > j+1 \end{cases} .$$

Als nächstes betrachten wir die Determinante der zuletzt erhaltenen Matrix A. Für $\lambda = 1$ hat sie die Elemente

$$a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i-1} & \text{für } i < j \\ i+1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases} .$$

Sie ist eine Dreiecksmatrix mit der Determinante

$$\det A = \prod_{\mu=1}^{k-1} (\mu+1) = k! .$$

Wir berechnen jetzt $\det A$ für $\lambda \neq 1$ und behaupten, daß

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda \det A_{1, \dots, k-2}^{1, \dots, k-2} \\ (3.2) \quad &+ \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{k-1}{\mu} (\lambda-1)^{\mu-1} \det A_{1, \dots, k-\mu-1}^{1, \dots, k-\mu-1} \\ &+ (\lambda-1)^1 \det A_{1, \dots, k-1-2, k-1}^{1, \dots, k-1-1} \quad (1 = 1, 2, \dots, k-3) \end{aligned}$$

gilt. Hierbei ist $\det A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_s}$ die Determinante derjenigen Matrix, die in der ϱ -ten Zeile und σ -ten Spalte das Element a_{i_ϱ, j_σ} hat.

Der Beweis wird mit Hilfe vollständiger Induktion nach l geführt. Die Entwicklung von $\det A$ nach der letzten Zeile ergibt

$$\det A = (k-1+\lambda)\det A_{1,\dots,k-2}^{1,\dots,k-2} - (1-\lambda)\det A_{1,\dots,k-3,k-1}^{1,\dots,k-2}$$

oder

$$\begin{aligned} \det A = & \lambda \det A_{1,\dots,k-2}^{1,\dots,k-2} + \binom{k-1}{1} \det A_{1,\dots,k-2}^{1,\dots,k-2} \\ & + (\lambda-1) \det A_{1,\dots,k-3,k-1}^{1,\dots,k-2} \end{aligned}$$

Das ist aber gerade die Behauptung (3.2) für $l = 1$. Nehmen wir an, (3.2) sei für alle $l \leq r-1$ schon bewiesen, dann ist noch zu zeigen, daß (3.2) auch für $l = r$ gilt. Für $l = r-1$ ist

$$\begin{aligned} \det A = & \lambda \det A_{1,\dots,k-2}^{1,\dots,k-2} \\ (3.3) \quad & + \sum_{\mu=1}^{r-1} \binom{k-1}{\mu} (\lambda-1)^{\mu-1} \det A_{1,\dots,k-\mu-1}^{1,\dots,k-\mu-1} \\ & + (\lambda-1)^{r-1} \det A_{1,\dots,k-r-1,k-1}^{1,\dots,k-r} \end{aligned}$$

Entwickeln wir jetzt $\det A_{1,\dots,k-r-1,k-1}^{1,\dots,k-r}$ nach der

letzten Zeile, so läßt sich

$$\det A_{1, \dots, k-r-1, k-1}^{1, \dots, k-r} = \binom{k-1}{k-r-1} \det A_{1, \dots, k-r-1}^{1, \dots, k-r-1} \\ - (1-\lambda) \det A_{1, \dots, k-r-2, k-1}^{1, \dots, k-r-1}$$

schreiben. Setzen wir dies in (3.3) ein, so ergibt sich

$$\det A = \lambda \det A_{1, \dots, k-2}^{1, \dots, k-2} \\ + \sum_{\mu=1}^r \binom{k-1}{\mu} (\lambda-1)^{\mu-1} \det A_{1, \dots, k-\mu-1}^{1, \dots, k-\mu-1} \\ + (\lambda-1)^r \det A_{1, \dots, k-r-2, k-1}^{1, \dots, k-r-1} .$$

Hiermit ist die Behauptung (3.2) bewiesen.

Mit $l = k-3$ erhalten wir aus (3.2)

$$\det A = \lambda \det A_{1, \dots, k-2}^{1, \dots, k-2} \\ + \sum_{\mu=1}^{k-3} \binom{k-1}{\mu} (\lambda-1)^{\mu-1} \det A_{1, \dots, k-\mu-1}^{1, \dots, k-\mu-1} \\ + (\lambda-1)^{k-3} \det A_{1, k-1}^{1, 2} .$$

Hierbei ist

$$\det A_{1,k-1}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 + \lambda & \binom{k-1}{0} \\ 1 - \lambda & \binom{k-1}{1} \end{vmatrix}$$

oder

$$\det A_{1,k-1}^{1,2} = \binom{k-1}{k-2} \det A_1^1 + (\lambda-1) \quad .$$

Deshalb können wir

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda \det A_{1,\dots,k-2}^{1,\dots,k-2} \\ (3.4) \quad &+ \sum_{\mu=1}^{k-2} \binom{k-1}{\mu} (\lambda-1)^{\mu-1} \det A_{1,\dots,k-\mu-1}^{1,\dots,k-\mu-1} \\ &+ (\lambda-1)^{k-2} \end{aligned}$$

schreiben. Aus der Gestalt von A entnehmen wir, daß

$$\chi_1(\lambda) = \det A_{1,\dots,1}^{1,\dots,1} \quad (1 = 1, 2, \dots, k-1)$$

gilt. (3.4) ist daher gleichbedeutend mit

$$(3.5) \quad \chi_{k-1}(\lambda) = \lambda \chi_{k-2}(\lambda) + \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{k-1}{\mu} (\lambda-1)^{\mu-1} \chi_{k-\mu-1}(\lambda) \quad ,$$

wenn wir $\chi_0(\lambda) \equiv 1$ setzen. Mit (3.5) haben wir also eine Rekursionsformel für die charakteristischen Polynome $\chi_{k-1}(\lambda)$ von $G(\Delta x_v)$ gewonnen. Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt sie auch für $\lambda = 1$, da $\chi_{k-1}(1) = k\chi_{k-2}(1)$ ist.

Mit der Indextransformation $q = k - \mu - 1$ erhalten wir aus (3.5)

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \lambda \chi_{k-2}(\lambda) + \sum_{q=0}^{k-2} \binom{k-1}{q} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda)$$

oder

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \sum_{q=0}^{k-3} \binom{k-1}{q} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda)$$

(3.6)

$$+ \binom{k}{k-1} \chi_{k-2}(\lambda) + (\lambda-1) \chi_{k-2}(\lambda) \quad .$$

Mit Hilfe von (3.6) läßt sich die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}(\lambda) &= \sum_{q=k-1}^{k-2} \binom{q+2}{q+1} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ (3.7) \quad &+ \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\mu=1}^{\min(1, k-q-2)} \binom{k-\mu}{q} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ &+ (\lambda-1)^1 \chi_{k-1-1}(\lambda) \quad (1 = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

beweisen. Durch Einsetzen von $l = 1$ in (3.7) ergibt sich Formel (3.6). Nehmen wir an, (3.7) sei für alle $1 \leq r-1$ schon bewiesen, dann ist noch zu zeigen, daß (3.7) auch für $l = r$ gilt. Für $l = r-1$ ist

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}(\lambda) &= \sum_{q=k-r}^{k-2} \binom{q+2}{q+1} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ (3.8) + \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\mu=1}^{\min(r-1, k-q-2)} \binom{k-\mu}{q} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ &+ (\lambda-1)^{r-1} \chi_{k-r}(\lambda) \end{aligned}$$

Wegen (3.6) gilt

$$\begin{aligned} (\lambda-1)^{r-1} \chi_{k-r}(\lambda) &= \sum_{\sigma=0}^{k-r-2} \binom{k-r}{\sigma} (\lambda-1)^{k-\sigma-2} \chi_{\sigma}(\lambda) \\ &+ \binom{k-r+1}{k-r} (\lambda-1)^{r-1} \chi_{k-r-1}(\lambda) + (\lambda-1)^r \chi_{k-r-1}(\lambda) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (\lambda-1)^{r-1} \chi_{k-r}(\lambda) &= \sum_{\sigma=0}^{k-3} \sum_{\mu=r}^{\min(r, k-\sigma-2)} \binom{k-\mu}{\sigma} (\lambda-1)^{k-\sigma-2} \chi_{\sigma}(\lambda) \\ &+ \binom{k-r+1}{k-r} (\lambda-1)^{r-1} \chi_{k-r-1}(\lambda) + (\lambda-1)^r \chi_{k-r-1}(\lambda) \end{aligned}$$

da die zweite Summe für $k-\sigma-2 < r$, d. h. $\sigma > k-r-2$, leer ist. Wenn wir $(\lambda-1)^{r-1} \chi_{k-r}(\lambda)$ in (3.8) durch die soeben erhaltene Formel ersetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}(\lambda) &= \sum_{q=k-r-1}^{k-2} \binom{q+2}{q+1} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ &+ \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\mu=1}^{\min(r, k-q-2)} \binom{k-\mu}{q} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ &+ (\lambda-1)^r \chi_{k-r-1}(\lambda) \quad . \end{aligned}$$

Die Beziehung (3.7) ist damit bewiesen.

Wir setzen jetzt $l = k-1$ in (3.7). Damit folgt

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}(\lambda) &= \sum_{q=0}^{k-2} \binom{q+2}{q+1} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ &+ \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\mu=1}^{k-q-2} \binom{k-\mu}{q} (\lambda-1)^{k-q-2} \chi_q(\lambda) \\ &+ (\lambda-1)^{k-1} \chi_0(\lambda) \quad . \end{aligned}$$

Dies läßt sich durch die Indextransformation

$\sigma = k - \mu$ und wegen $\chi_0(\lambda) \equiv 1$ umformen zu

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}(\lambda) &= \sum_{\vartheta=0}^{k-2} \left[\binom{\vartheta+2}{\vartheta+1} + \sum_{\sigma=\vartheta+2}^{k-1} \binom{\sigma}{\vartheta} \right] (\lambda-1)^{k-\vartheta-2} \chi_{\vartheta}(\lambda) \\ &\quad + \binom{k}{k-1} \chi_{k-2}(\lambda) + (\lambda-1)^{k-1} . \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Hilfssatz 2 läßt sich $\sum_{\sigma=\vartheta+2}^{k-1} \binom{\sigma}{\vartheta}$ einfacher schreiben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \chi_{k-1}(\lambda) &= \sum_{\vartheta=0}^{k-2} \left[\binom{\vartheta+2}{\vartheta+1} + \binom{k}{\vartheta+1} - \binom{\vartheta+2}{\vartheta+1} \right] (\lambda-1)^{k-\vartheta-2} \chi_{\vartheta}(\lambda) \\ &\quad + \binom{k}{k-1} \chi_{k-2}(\lambda) + (\lambda-1)^{k-1} \end{aligned}$$

oder

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \sum_{\vartheta=0}^{k-2} \binom{k}{\vartheta+1} (\lambda-1)^{k-\vartheta-2} \chi_{\vartheta}(\lambda) + (\lambda-1)^{k-1} .$$

Um die im Satz genannte Rekursionsformel zu erhalten, setzen wir

$$(3.9) \quad \lambda = \tau+1 \text{ und } \chi_{k-1}(\lambda) = \chi_{k-1}(\tau+1) \equiv \psi_{k-1}(\tau)$$

und es ergibt sich

$$\psi_0(\tau) \equiv 1$$

(3.10)

$$\psi_{k-1}(\tau) = \tau^{k-1} + \sum_{s=0}^{k-2} \binom{k}{s+1} \tau^{k-s-2} \psi_s(\tau) \quad .$$

Nun betrachten wir die folgende erzeugende Funktion
(vgl. L. COLLATZ und W. QUADE [3])

$$(3.11) \quad F(\tau, x) = 1 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \psi_{\mu}(\tau) \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \quad .$$

Um die Gültigkeit dieser Entwicklung nach Potenzen von x sicherzustellen, ist der Nachweis ihrer Konvergenz in Abhängigkeit von τ erforderlich. Es sei $|\tau| \leq a$ ($a > 0$). Da die Koeffizienten von $\psi_s(\tau)$ alle positiv sind, was aus (3.10) folgt, ist

$$|\psi_{\mu}(\tau)| \leq \psi_{\mu}(a) \quad .$$

Wir beweisen jetzt durch vollständige Induktion an Hand von (3.10), daß

$$\psi_{\mu}(a) \leq (a+1)^{\mu} \quad (\mu+1)! \quad (\mu = 0, 1, \dots) \quad .$$

Der Induktionsanfang ist klar, da $\psi_0(\tau) \equiv 1$ ist.

Es gilt weiter

$$\psi_\mu(a) \leq a^\mu + \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} \binom{\mu+1}{\varrho+1} a^{\mu-\varrho-1} (a+1)^\varrho (\varrho+1)!$$

oder

$$\psi_\mu(a) \leq a^\mu + \frac{(a+1)^\mu}{a} (\mu+1)! \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} \frac{1}{(\mu-\varrho)!} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\mu-\varrho}.$$

Nach Unterdrückung der Nenner $(\mu-\varrho)!$ geht die rechtsstehende Summe in eine geometrische Reihe über und es folgt

$$\psi_\mu(a) \leq a^\mu + \frac{(a+1)^\mu}{a} (\mu+1)! \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\mu-\varrho}$$

oder

$$\psi_\mu(a) \leq a^\mu + (a+1)^\mu (\mu+1)! - a^\mu (\mu+1)!.$$

Wenn wir $a^\mu (\mu+1)!$ nach unten durch a^μ abschätzen, ergibt sich

$$\psi_\mu(a) \leq (a+1)^\mu (\mu+1)!.$$

Damit ist die absolute Konvergenz der Entwicklung
(3.11) für

$$|x| < \frac{1}{a+1}$$

nachgewiesen. Zu jedem τ gibt es einen von Null
verschiedenen Konvergenzbereich der Entwicklung
(3.11).

Zur Bestimmung der erzeugenden Funktion $F(\tau, x)$
bilden wir den Ausdruck

$$(\tau+1)(F(\tau, x)-1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\tau+1) \psi_{\mu}(\tau) \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!} .$$

Es ist

$$(\tau+1) \psi_{\mu}(\tau) = \tau^{\mu+1} + \sum_{\varrho=0}^{\mu} \binom{\mu+1}{\varrho+1} \tau^{\mu-\varrho} \psi_{\varrho}(\tau) .$$

Diesen Ausdruck erhalten wir, indem wir die Rekur-
sionsformel (3.10) für $\mu = k-1$ mit τ multiplizie-
ren und auf beiden Seiten $\psi_{\mu}(\tau)$ addieren. Damit
folgt

$$\begin{aligned} (\tau+1)(F(\tau, x)-1) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\tau^{\mu+1} \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \right. \\ &+ \left. \sum_{\varrho=0}^{\mu} \binom{\mu+1}{\varrho+1} \tau^{\mu-\varrho} \psi_{\varrho}(\tau) \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \right) . \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist die Potenzreihenentwicklung von

$$e^{\tau x} F(\tau, x) - 1 \quad ,$$

wie sich durch Ausmultiplizieren der Potenzreihen von $e^{\tau x}$ und $F(\tau, x)$ unmittelbar ergibt. Somit genügt $F(\tau, x)$ der Bestimmungsgleichung

$$(\tau+1)(F(\tau, x)-1) = e^{\tau x} F(\tau, x) - 1 \quad .$$

Daraus ergibt sich

$$(3.12) \quad F(\tau, x) = 1 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \Psi_{\mu}(\tau) \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!} = \frac{\tau}{\tau+1-e^{\tau x}} \quad .$$

Mit (3.9) folgt aus (3.12) als erzeugende Funktion für die $\chi_{k-1}(\lambda)$

$$(3.13) \quad \Phi(\lambda, x) = \frac{\lambda-1}{\lambda-e^{(\lambda-1)x}} = 1 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \chi_{\mu}(\lambda) \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \quad .$$

Es ist leicht zu bestätigen, daß die erzeugende Funktion $\Phi(\lambda, x)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\lambda(\lambda-1) \frac{\partial \Phi(\lambda, x)}{\partial \lambda} + (1-\lambda x) \frac{\partial \Phi(\lambda, x)}{\partial x} = \Phi(\lambda, x)$$

genügt. Setzen wir hierin für $\Phi(\lambda, x)$ die rechte

Seite von (3.13) ein und vergleichen die Koeffizienten der gleichen Potenzen von x , so erhalten wir als Rekursionsformel für die $\chi_{k-1}(\lambda)$ gerade (3.1).

Gehen wir mit

$$\chi_{k-1}(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \alpha_{k-1,\mu} \lambda^{\mu}$$

in (3.1), so erhalten wir eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $\alpha_{k-1,\mu}$ der $\chi_{k-1}(\lambda)$. Denn aus

$$\begin{aligned} & \alpha_{k-1,0} + \sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_{k-1,\mu} \lambda^{\mu} + \alpha_{k-1,k-1} \lambda^{k-1} \\ &= \alpha_{k-2,0} + \sum_{\mu=1}^{k-2} \left[\alpha_{k-2,\mu} (1+\mu) + (k-\mu) \alpha_{k-2,\mu-1} \right] \lambda^{\mu} \\ & \quad + \alpha_{k-2,k-2} \lambda^{k-1} \end{aligned}$$

liefert ein Vergleich der Koeffizienten

$$\alpha_{k-1,\mu} = (1+\mu) \alpha_{k-2,\mu} + (k-\mu) \alpha_{k-2,\mu-1} \quad (1 \leq \mu \leq k-2)$$

$$(3.14) \quad \alpha_{k-1,0} = \alpha_{k-2,0} = \dots = 1 \quad ,$$

$$\alpha_{k-1,k-1} = \alpha_{k-2,k-2} = \dots = 1 \quad .$$

Die Polynome $\chi_{k-1}(\lambda)$ haben lauter einfache Nullstellen, die negativ reell sind. Dies folgt aus der Rekursionsformel (3.1) durch vollständige Induktion. $\chi_1(\lambda)$ hat die einzige Nullstelle $\lambda = -1$. Die Behauptung sei richtig für $\chi_{k-2}(\lambda)$. Ist dann λ_0 irgendeine (einfache) negative Nullstelle von $\chi_{k-2}(\lambda)$, dann folgt aus (3.1)

$$(3.16) \quad \chi_{k-1}(\lambda_0) = \lambda_0(1-\lambda_0) \chi'_{k-2}(\lambda_0) \quad .$$

Da $1-\lambda_0 > 1$ und $\lambda_0 < 0$, haben $\chi_{k-1}(\lambda)$ und $\chi'_{k-2}(\lambda)$ an der Stelle λ_0 entgegengesetztes Vorzeichen. Da aber $\chi_{k-2}(\lambda)$ eine Funktion ist, die lauter einfache Nullstellen besitzt, hat $\chi'_{k-2}(\lambda)$ an zwei benachbarten Nullstellen λ_1 und λ_2 von $\chi_{k-2}(\lambda)$ verschiedenes Vorzeichen, $\chi_{k-1}(\lambda)$ weist also im Intervall (λ_1, λ_2) einen Vorzeichenwechsel auf. Zwischen je zwei Nullstellen von $\chi_{k-2}(\lambda)$ liegt somit mindestens eine Nullstelle von $\chi_{k-1}(\lambda)$.

Alle $\chi_{k-1}(\lambda)$ nehmen wegen (3.1) für $\lambda = 0$ den Wert 1 an und gehen für $\lambda \rightarrow -\infty$ gegen $-\infty$ oder $+\infty$, je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist, denn alle Koeffizienten von $\chi_{k-1}(\lambda)$ sind wegen (3.14) positiv.

An der größten (dem Nullpunkt nächstgelegenen) Nullstelle von $\chi_{k-2}(\lambda)$ ist die Ableitung $\chi'_{k-2}(\lambda)$ immer positiv, somit nach (3.16) $\chi_{k-1}(\lambda)$ negativ. Es wechselt also $\chi_{k-1}(\lambda)$ zwischen dieser Nullstelle von $\chi_{k-1}(\lambda)$ und dem Nullpunkt sein Vorzeichen.

An der kleinsten Nullstelle von $\chi_{k-2}(\lambda)$ ist für gerades (ungerades) k die Ableitung $\chi'_{k-2}(\lambda)$ positiv (negativ), daher $\chi_{k-1}(\lambda)$ nach (3.16) an dieser Stelle negativ (positiv). $\chi_{k-1}(\lambda)$ muß also sowohl für gerades als auch für ungerades k eine Nullstelle besitzen, die kleiner ist als die kleinste von $\chi_{k-2}(\lambda)$.

Insbesondere haben alle $\chi_{k-1}(\lambda)$ mit geradem k die Nullstelle $\lambda = -1$. Dies folgt aus der Symmetrieeigenschaft (3.15) der Koeffizienten $\alpha_{k-1,\mu}$. Die $\chi_{k-1}(\lambda)$ mit ungeradem k sind alle für $\lambda = -1$ von Null verschieden, denn die Nullstellen der $\chi_{k-1}(\lambda)$ sind alle einfach und es ist daher $\chi'_{k-1}(-1)$ bei geradem k immer von Null verschieden, somit nach (3.16) $\chi_k(-1) \neq 0$.

Satz 7 (L. COLLATZ und W. QUADE [3]; H. EHLICH [4])

Die periodische k -Spline Interpolationsfunktion in den äquidistanten Knoten $x_0 + rL/N$ ($r \in \mathbb{Z}$) exi-

stiert und ist eindeutig für:

1. Ungerades N und gerades k
2. Ungerades N und ungerades k
3. Gerades N und ungerades k .

Für gerades N und gerades k existiert sie im allgemeinen nicht.

Beweis:

Wie wir in Satz 1 sahen, können wir uns auf die Betrachtung von

$$(3.17) \quad \det(E - G^N(L/N))$$

beschränken. Der einzige Eigenwert der Matrix $G(L/N)$ vom Betrage 1 ist wegen Satz 6 der Wert -1 . Dieser kann aber nur für gerades k Eigenwert von $G(L/N)$ sein. Nach einem bekannten Satz (vgl. W. GRÖBNER [6], S. 163) hat $G^N(L/N)$ die Eigenwerte λ_i^N ($i = 1, 2, \dots, k-1$), wenn $G(L/N)$ die Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) hat. Daraus folgt, daß 1 nur Eigenwert von $G^N(L/N)$ sein kann, wenn k und N beide gerade sind. Die Determinante (3.17) ist also nur dann Null, wenn k und N gerade sind. Hieraus folgt unsere Behauptung.

§ 4 Über die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\text{von } G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)$$

Satz 8

Die Determinante

$$(4.1) \quad \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))$$

ändert ihren Wert bei zyklischer Vertauschung der Δx_i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) und bei umgekehrter Reihenfolge der Δx_i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) nicht.

Beweis:

Es ist (4.1) nach Multiplikation mit

$$\det G^{-1}(\Delta x_0) \det G(\Delta x_0) = 1$$

$$\det(E - G(\Delta x_0)G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_1)) \quad .$$

Damit ist der erste Teil von Satz 8 bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teils wird (4.1) zu

$$\det(E - G^T(\Delta x_0)G^T(\Delta x_1)\dots G^T(\Delta x_{N-1}))$$

umgeformt. Bei Anwendung von Satz 2 und Satz 3 erhalten wir

$$\det(E - MG(\Delta x_0)MMG(\Delta x_1)M \dots MG(\Delta x_{N-1})M)$$

oder, da $M^2 = E$ ist,

$$\det(E - G(\Delta x_0)G(\Delta x_1) \dots G(\Delta x_{N-1})) \quad .$$

Satz 9

a) Ist λ Eigenwert von

$$(4.2) \quad G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0),$$

so ist auch λ^{-1} Eigenwert von (4.2).

b) Sei λ ein fester Eigenwert von (4.2) zum Eigenvektor x und β ein beliebiger Eigenwert von (4.2) mit $\lambda\beta \neq 1$. Dann liegt der Eigenvektor zu β in einer Hyperebene, auf der der Vektor $\tilde{x} = MWx$ senkrecht steht.

Beweis:

a) Wegen Satz 5 und $W^2 = E$ ist

$$(4.3) \quad (G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0))^{-1}$$

ähnlich zu

$$(4.4) \quad G(\Delta x_0)G(\Delta x_1) \dots G(\Delta x_{N-1}) \quad .$$

(4.4) ist wegen Satz 2 und Satz 3 ähnlich zu

$$(4.5) \quad (G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))^T \quad .$$

Also ist (4.3) ähnlich zu (4.5). Hiermit ergibt sich die Behauptung a), wenn wir berücksichtigen, daß mit dem Eigenwert λ von (4.2) λ^{-1} Eigenwert von (4.3) ist und (4.2) sowie (4.5) dieselben Eigenwerte haben.

b) Aus

$$G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)x = \lambda x$$

folgt nach Multiplikation von links mit

$$G^{-1}(\Delta x_0)G^{-1}(\Delta x_1)\dots G^{-1}(\Delta x_{N-1}) \text{ wegen Satz 5 und } W^2 = E$$

$$x = \lambda W G(\Delta x_0)G(\Delta x_1)\dots G(\Delta x_{N-1})(Wx) \quad .$$

Multiplikation dieser Gleichung von links mit W und Division durch λ ergibt

$$\lambda^{-1}(Wx) = G(\Delta x_0)G(\Delta x_1)\dots G(\Delta x_{N-1})(Wx) \quad .$$

Diese Gleichung läßt sich zu

$$\lambda^{-1}(Wx) = (G^T(\Delta x_{N-1})G^T(\Delta x_{N-2})\dots G^T(\Delta x_0))^T(Wx)$$

umformen und mit Hilfe von Satz 2 und Satz 3 er-

halten wir

$$\lambda^{-1}(Wx) = M(G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))^T(MWx) \quad .$$

Nach Multiplikation dieser Beziehung von links mit M haben wir

$$\lambda^{-1}(MWx) = (G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))^T(MWx)$$

oder nach Transponieren beider Seiten der Gleichung

$$(4.6) \quad \tilde{x}^T G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0) = \lambda^{-1}\tilde{x}^T \quad .$$

Es sei

$$(4.7) \quad G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)y = \beta y$$

mit $\lambda\beta \neq 1$, dann folgt nach Multiplikation von

(4.6) mit y von rechts, Multiplikation von (4.7)

mit $\tilde{x}^T$ von links und Subtraktion der beiden

so erhaltenen Gleichungen

$$0 = (\lambda^{-1} - \beta) \tilde{x}^T y \quad .$$

Da wegen $\lambda\beta \neq 1$ der skalare Faktor $(\lambda^{-1} - \beta) \neq 0$ ist, haben wir

$$\tilde{x}^T y = 0 \quad .$$

Der Vektor y liegt also in einer Hyperebene, auf der $\tilde{x}$ senkrecht steht.

§ 5 Die Unterdeterminanten von $G(\Delta x_v)$

Definition 1 (vgl. F. R. GANTMACHER und M. G. KREIN [5])

Eine (n,n) -Matrix heißt total nichtnegativ, wenn ihre sämtlichen Unterdeterminanten beliebiger Ordnung nichtnegativ sind.

Satz 10 (I. J. SCHOENBERG [8]; F. R. GANTMACHER und M. G. KREIN [5])

Seien die (n,n) -Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) total nichtnegativ, so sind auch

$$a) \begin{pmatrix} K & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ . & & a_{i,j} & & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & . \\ & & & & . \\ & & a_{i,j} & & . \\ & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & K' \end{pmatrix}$$

mit $K > 0$ bzw. $K' > 0$,

b) die Matrix A^* , die entsteht, wenn wir ein positives Vielfaches einer Zeile (Spalte) von A zu einer benachbarten Zeile (Spalte) addieren

c) $C = AB$

total nichtnegativ.

Beweis:

a) Es lassen sich folgende Fälle unterscheiden.

1. Die betrachtete Unterdeterminante enthält nur

Elemente von A. Dann ist sie nach Voraussetzung nichtnegativ.

2. Die Unterdeterminante besitzt als erste Zeile eine Nullzeile oder als erste Spalte eine Nullspalte. Sie ist ebenfalls nichtnegativ.

3. Die Unterdeterminante enthält in der linken oberen Ecke das Element $K > 0$. Dann sind die übrigen Elemente in der ersten Zeile und ersten Spalte alle Null. Entwickeln wir die Unterdeterminante nach der ersten Zeile, so ergibt sich, daß sie nichtnegativ ist.

Der Beweis für die andere Matrix verläuft entsprechend.

b) Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die i-te Zeile von A^* ein positives Vielfaches der (i+1)-ten Zeile von A addiert zu der i-ten Zeile von A, d. h. $a_i^* = \beta a_{i+1} + a_i$ ($\beta > 0$), wenn wir mit a_μ^* bzw. a_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) die μ -te Zeile von A^* bzw. A bezeichnen.

Mit der Unterdeterminante $\det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$ von A^* läßt sich folgende Fallunterscheidung treffen:

1. Alle i_μ ($\mu = 1, 2, \dots, r$) sind von i verschieden. Dann ist $\det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$ nach Voraussetzung nichtnegativ.

2. Es ist $i_q = i$ und $i_{q+1} = i+1$. Nach einem bekannt-

ten Determinantensatz ergibt sich

$$\det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} = \det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} \geq 0 \quad .$$

3. Es ist $i_q = i$ und kein i_μ ($\mu = 1, 2, \dots, r$) stimmt mit $i+1$ überein. Wir haben dann

$$\begin{aligned} & \det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_{q-1}, i, i_{q+1}, \dots, i_r} \\ &= \beta \det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_{q-1}, i, i_{q+1}, \dots, i_r} \\ &+ \det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_{q-1}, i+1, i_{q+1}, \dots, i_r} \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

c) Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich sofort nach dem Satz von BINET-CHAUCHY. Er gibt an, wie sich die Unterdeterminanten eines Produkts zweier Matrizen durch die Unterdeterminanten der Faktoren ausdrücken:

$$\begin{aligned} \det C_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq n} \det A_{\mu_1, \dots, \mu_r}^{i_1, \dots, i_r} \det B_{j_1, \dots, j_r}^{\mu_1, \dots, \mu_r} \\ & \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n) \quad . \end{aligned}$$

Hilfssatz 4

Die $(k-1, k-1)$ -Matrix $-G(\Delta x_v)$ ist total nichtnegativ.

Beweis:

Wir betrachten zunächst die Zerlegung aus Satz 4

$$G(\Delta x_v) = L(\Delta x_v)DR(\Delta x_v) \quad .$$

Hierin können wir $L(\Delta x_v) = T(\Delta x_v)L$ und $R(\Delta x_v) = RS(\Delta x_v)$ setzen, mit

$$t_{i,j}(\Delta x_v) = \frac{i!}{(\Delta x_v)^i} \delta_{i,j} \quad ,$$

$$s_{i,j}(\Delta x_v) = \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} \delta_{i,j} \quad ,$$

$$l_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ und } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

und

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

$T(\Delta x_v)$ und $S(\Delta x_v)$ sind Diagonalmatrizen mit nicht-negativen Elementen in der Hauptdiagonalen. Sie sind ersichtlich total nichtnegativ.

Wir beweisen, daß L total nichtnegativ ist. Ist $k = 2$, so gilt $L = (1)$, also ist L total nichtnegativ. Nehmen wir an, die $(k-2, k-2)$ -Matrix L sei total nichtnegativ, so ergibt die Umformung a) von

Satz 10 mit $K = 1$ die $(k-1, k-1)$ -Matrix A mit den Elementen

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ und } i = j+1 > 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sie ist total nichtnegativ. Wenden wir auf diese Matrix die Umformung b) von Satz 10 an, indem wir die erste Zeile zur zweiten Zeile addieren, so erhalten wir gerade die $(k-1, k-1)$ -Matrix L , die also wegen Satz 10 ebenfalls total nichtnegativ ist.

Zum Beweis, daß R total nichtnegativ ist, setzen wir $k = 2$. Dann ist $R = (1)$ total nichtnegativ. Es sei für die $(k-2, k-2)$ -Matrix R schon bewiesen, daß sie total nichtnegativ ist. Wir wenden jetzt wieder die Umformung a) von Satz 10 mit $K = 1$ an und erhalten die $(k-1, k-1)$ -Matrix B mit den Elementen

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i \geq j > 1 \text{ und } i = j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die total nichtnegativ ist. Die Umformung b) von

Satz 10 in Form einer Addition der zweiten Spalte zur ersten Spalte ergibt die $(k-1, k-1)$ -Matrix R . Wegen Satz 10 ist R ebenfalls total nichtnegativ.

Auch die Tatsache, daß $-D$ total nichtnegativ ist, läßt sich durch vollständige Induktion nach der Dimension von $-D$ beweisen. Von Satz 4 wissen wir, daß

$$-D = \left(\binom{j-1}{i-1} \right) \quad (1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1)$$

gilt. Für $k = 2$ ist $-D = \left(\binom{0}{0} \right) = (1)$ und folglich total nichtnegativ. Es sei schon bewiesen, daß die $(k-2, k-2)$ -Matrix $-D$ total nichtnegativ ist. Wir wenden von neuem die Umformung a) von Satz 10 an und erhalten aus $-D$ eine $(k-1, k-1)$ -Matrix A_0 mit den Elementen

$$a_{i,j}^0 = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{für } i = 1, j > 1 \text{ und } j = 1, i > 1 \\ \binom{j-2}{i-2} & \text{für } i, j > 1 \end{cases}$$

Es wird jetzt eine Folge von Matrizen A_1 ($l = 0, 1, \dots, k-1$) mit

$$a_{i,j}^1 = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{für } j = 1, i > 1 \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{für } i \leq 1, j > 1 \text{ (} l = 1, 2, \dots, k-1 \text{)} \\ \binom{j-2}{i-2} & \text{für } i > 1, j > 1 \end{cases}$$

definiert. Wir behaupten, daß sämtliche A_l dieser Folge total nichtnegativ sind. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach l geführt.

Für $l = 0$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an, A_{l-1} sei total nichtnegativ. Auf A_{l-1} wird die Umformung b) von Satz 10 angewendet, indem die $(l+1)$ -te Zeile zur l -ten Zeile addiert wird. Das ergibt die total nichtnegative Matrix A^* mit den Elementen

$$a_{i,j}^* = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{für } j = 1, i > 1 \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{für } i \leq l-1, j > 1 \\ \binom{j-2}{l-2} + \binom{j-2}{l-1} = \binom{j-1}{l-1} & \text{für } i = l, j > 1 \\ \binom{j-2}{i-2} & \text{für } i > l, j > 1 \end{cases},$$

die identisch mit der Matrix A_l ist.

Wir setzen $l = k-1$ und sehen, daß die Matrix A_{k-1} ,
mit

$$a_{i,j}^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{für } j = 1, i > 1 \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{für } j > 1 \end{cases}$$

total nichtnegativ ist. A_{k-1} ist aber die $(k-1, k-1)$ -
Matrix $-D$.

Mit Satz 10 c) folgt, daß

$$-G(\Delta x_v) = T(\Delta x_v)L(-D)RS(\Delta x_v)$$

total nichtnegativ ist.

§ 6 Periodische Spline-Interpolation

in nicht notwendig äquidistanten Knoten

Definition 2 (vgl. W. GRÖBNER [6])

Es sei $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ und $1 \leq r \leq \min(m, n)$. Wir denken uns die $\binom{m}{r}$ Kombinationen $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ sowie die $\binom{n}{r}$ Kombinationen $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ in lexikographischer Reihenfolge geordnet. Unter der r -ten Ableitung einer (m, n) -Matrix $A = (a_{i,j})$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) versteht man eine $\left(\binom{m}{r}, \binom{n}{r} \right)$ -Matrix $A^{(r)}$ mit den Elementen

$$a_{i,j}^{(r)} = \det A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r},$$

wobei $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ das i -te Element und $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ das j -te Element in der oben definierten lexikographischen Anordnung ist.

Mit dieser Definition sieht man sofort:

- a) Die erste Ableitung einer Matrix A ist A selbst.
- b) Die n -te Ableitung einer (n, n) -Matrix A ist $\det A$.

Satz 11 (vgl. W. GRÖBNER [6])

Sei $C = AB$, dann gilt

$$C^{(r)} = A^{(r)} B^{(r)} \quad .$$

Beweis:

Der Beweis folgt aus dem Satz von BINET-CAUCHY.

Satz 12

Die periodische k -Spline-Interpolationsfunktion in den Knoten $x_v + rL$ ($v = 0, 1, \dots, N-1$; $r \in \mathbb{Z}$) mit

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < L \quad (L > 0) \quad ,$$

existiert und ist eindeutig für:

1. Ungerades N und gerades k
2. Ungerades N und ungerades k
3. Gerades N und ungerades k .

Für gerades N und gerades k existiert sie im allgemeinen nicht.

Beweis:

Seien N und k beide gerade, so folgt nach Multiplikation von $\det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))$ mit $\det(G^{-1}(\Delta x_0)G^{-1}(\Delta x_1)\dots G^{-1}(\Delta x_{N-1})) = 1$

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad & \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) \\
 &= \det (G^{-1}(\Delta x_0)G^{-1}(\Delta x_1) \dots G^{-1}(\Delta x_{N-1}) - E) \quad .
 \end{aligned}$$

(6.1) wird

$$\begin{aligned}
 & \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) \\
 &= -\det(E - G^{-1}(\Delta x_0)G^{-1}(\Delta x_1) \dots G^{-1}(\Delta x_{N-1}))
 \end{aligned}$$

oder mit Hilfe von Satz 5 und $W^2 = E$

$$\begin{aligned}
 & \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) \\
 &= -\det(E - G(\Delta x_0)G(\Delta x_1) \dots G(\Delta x_{N-1})) \quad .
 \end{aligned}$$

Mit Satz 8 folgt

$$\begin{aligned}
 & \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) \\
 &= -\det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) \quad .
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2}) \dots G(\Delta x_0)) = 0 \quad .$$

Für gerades N und gerades k existiert also wegen Satz 1 die periodische Spline-Interpolationsfunktion im allgemeinen nicht.

Wir wollen von nun an ungerades N voraussetzen.

Nach einem bekannten Satz aus der Matrizenrechnung (vgl. W. GRÖBNER [6], S. 153) ist

$$\begin{aligned} & \det(\lambda E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)) \\ (6.2) \quad &= \lambda^{k-1} + \sum_{\mu=1}^{k-1} (-1)^\mu S_\mu \lambda^{k-\mu-1} . \end{aligned}$$

Hierin ist S_μ die Summe der μ -reihigen Hauptunterdeterminanten von $G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)$. Setzen wir $\lambda = 1$ in (6.2), so ergibt sich

$$\det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)) = 1 + \sum_{\mu=1}^{k-1} (-1)^\mu S_\mu .$$

Mit Definition 2 läßt sich für S_μ auch

$$S_\mu = \text{Spur}(G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0))^{(\mu)}$$

schreiben. Mit Satz 11 gilt also

$$\begin{aligned} & \det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)) \\ (6.3) \quad &= 1 + \sum_{\mu=1}^{k-1} (-1)^\mu \text{Spur}(G^{(\mu)}(\Delta x_{N-1})G^{(\mu)}(\Delta x_{N-2})\dots G^{(\mu)}(\Delta x_0)) . \end{aligned}$$

Wegen Hilfssatz 4 wissen wir, daß sämtliche Elemente von $G^{(\mu)}(\Delta x_v)$ für gerades μ nichtnegativ und für ungerades μ nichtpositiv sind. Damit folgt, daß auch $G^{(\mu)}(\Delta x_{N-1})G^{(\mu)}(\Delta x_{N-2})\dots G^{(\mu)}(\Delta x_0)$ diese Eigenschaft hat, da N als ungerade vorausgesetzt war. Es ist also

$$\text{Spur}(G^{(\mu)}(\Delta x_{N-1})G^{(\mu)}(\Delta x_{N-2})\dots G^{(\mu)}(\Delta x_0)) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } \mu \equiv 0(2) \\ \leq 0 & \text{für } \mu \equiv 1(2) \end{cases} .$$

Bei Berücksichtigung dieses Ergebnisses in (6.3), erhalten wir

$$\det(E - G(\Delta x_{N-1})G(\Delta x_{N-2})\dots G(\Delta x_0)) \geq 1 > 0 .$$

Wegen Satz 1 existiert also für ungerades N die periodische Spline-Interpolationsfunktion und ist eindeutig bestimmt.

In [10] zeigte I. J. SCHOENBERG mit anderen Methoden, daß für gerades N und ungerades k eine periodische Spline-Interpolationsfunktion existiert.

§ 7 Periodische quadratische Spline-Interpolation

Um die periodische k -Spline-Interpolationsfunktion in den Fällen, in denen sie existiert, numerisch zu bestimmen, können wir folgendes Verfahren anwenden.

Zunächst bestimmen wir an der Stelle x_0 die Ableitungen μ -ter Ordnung von $g_k(x)$ ($\mu = 1, 2, \dots, k-1$) durch Auflösen des linearen Gleichungssystems (0.3).

Der Lösungsvektor ist $(k-1)$ -dimensional, und in seiner μ -ten Komponente enthält er $g_k^{(\mu)}(x_0)$. Mit (1.4) kommen wir dann für $v = 0$ zu den Ableitungen μ -ter Ordnung ($\mu = 1, 2, \dots, k-1$) im Punkte x_1 . Wenn wir so mit Hilfe von (1.4) fortfahren, gelangen wir schließlich zu den Ableitungen μ -ter Ordnung ($\mu = 1, 2, \dots, k-1$) im Punkte x_{N-1} . Die rechtsseitige Derivierte von $g_k^{(k-1)}(x)$ im Punkte x_v ist wegen (1.1)

$$(7.1) \quad g_k^{(k)}(x_v)_+ = \frac{k!}{(\Delta x_v)^k} \left[\Delta y_v - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\Delta x_v)^j}{j!} g_k^{(j)}(x_v) \right] .$$

Wir wenden jetzt dieses Verfahren auf die periodische quadratische Spline-Interpolation an. Sie ist wegen Satz 12 im allgemeinen nur für ungerades N möglich. Die $G(\Delta x_v)$ sind hier $(1,1)$ -Matrizen. Wir stellen zuerst das lineare Gleichungssystem

(0.3) auf. Es ist hierbei $G(\Delta x_\nu) = (-1)$ und
 $c_\mu = 2 \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu}$. Das lineare Gleichungssystem lautet
dann

$$(1 - (-1)^N)u = \sum_{\mu=0}^{N-2} 2(-1)^{N-\mu-1} \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} + 2 \frac{\Delta y_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}$$

oder, da N ungerade ist,

$$u = \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu}.$$

Wir behaupten nun, daß

$$(7.2) \quad u_\nu = (-1)^\nu \sum_{\mu=\nu}^{N+\nu-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, N-1).$$

Es sei

$$(7.3) \quad u_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} \sum_{\mu=\nu-1}^{N+\nu-2} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu}.$$

Mit (1.4) bekommen wir hieraus

$$u_\nu = G(\Delta x_{\nu-1})u_{\nu-1} + c_{\nu-1} = -u_{\nu-1} + 2 \frac{\Delta y_{\nu-1}}{\Delta x_{\nu-1}}.$$

Wir setzen (7.3) ein und erhalten

$$u_\nu = (-1)^\nu \sum_{\mu=\nu-1}^{N+\nu-2} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} + 2 \frac{\Delta y_{\nu-1}}{\Delta x_{\nu-1}}$$

oder

$$u_v = (-1)^v \sum_{\mu=v}^{N+v-2} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} - \frac{\Delta y_{v-1}}{\Delta x_{v-1}} + 2 \frac{\Delta y_{v-1}}{\Delta x_{v-1}} .$$

Das ist aber, wenn wir $\Delta y_{v-1} = \Delta y_{N+v-1}$ und $\Delta x_{v-1} = \Delta x_{N+v-1}$ berücksichtigen,

$$u_v = (-1)^v \sum_{\mu=v}^{N+v-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} .$$

Hiermit ist (7.2) bewiesen.

Wir bestimmen jetzt $g_2''(x_v)_+$. Wegen (7.1) gilt

$$g_2''(x_v)_+ = \frac{2}{(\Delta x_v)^2} \left[\Delta y_v - (\Delta x_v) u_v \right] .$$

Wird hierin (7.2) eingesetzt, so erhalten wir

$$g_2''(x_v)_+ = \frac{2}{(\Delta x_v)^2} \left[\Delta y_v - (-1)^v (\Delta x_v) \sum_{\mu=v}^{N+v-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} \right]$$

oder

$$\begin{aligned} g_2''(x_v)_+ &= 2 \frac{\Delta y_v}{(\Delta x_v)^2} + (-1)^{v+1} \frac{2}{\Delta x_v} \left[(-1)^v \frac{\Delta y_v}{\Delta x_v} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu=v+1}^{N+v-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} \right] . \end{aligned}$$

Das ergibt

$$g_2''(x_v)_+ = (-1)^{v+1} \frac{2}{\Delta x_v} \sum_{\mu=v+1}^{N+v-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} .$$

Folglich lautet die periodische quadratische Spline-Interpolationsfunktion im Intervall $[x_v, x_{v+1}]$

$$g_{2,v}(x) = y_v + (-1)^v \left(\sum_{\mu=v}^{N+v-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} \right) (x - x_v) \\ + (-1)^{v+1} \frac{1}{\Delta x_v} \left(\sum_{\mu=v+1}^{N+v-1} (-1)^\mu \frac{\Delta y_\mu}{\Delta x_\mu} \right) (x - x_v)^2 .$$

Literaturverzeichnis

- AHLBERG, J. H., NILSON, E. N. und WALSH, J. L. [1]:
Best approximation properties of the spline
fit. J. Math. Mech. 11, 225-234 (1962).
- [2]: Best approximation and convergence
properties of higher order spline approx-
imations. J. Math. Mech. 14, 231-243 (1965).
- COLLATZ, L. und QUADE, W. [3]: Zur Interpolations-
theorie der reellen periodischen Funktio-
nen. S.-B. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math.
Kl. 30, 383-429 (1938).
- EHLICH, H. [4]: Untersuchungen zur numerischen
Fourieranalyse. Math. Zeitschr. 91, 380-
420 (1966).
- GANTMACHER, F. R. und KREIN, M. G. [5]: Oszilla-
tionsmatrizen, Oszillationskerne und klei-
ne Schwingungen mechanischer Systeme.
Akademie-Verlag, Berlin 1960.
- GRÖBNER, W. [6]: Matrizenrechnung. B.I. Hochschul-
taschenbücher 103/103a.
- MÜLLER, M. [7]: Über Interpolation mittels ganzer
rationaler Funktionen. Math. Zeitschr. 62,
292-309 (1955).

SCHOENBERG, I. J. [8]: Zur Abzählung der reellen
Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math.
Zeitschr. 38, 546-564 (1934).

----- [9]: Contributions to the problem of
approximation of equidistant data by ana-
lytic functions. Quart. Appl. Math. 4,
45-99 (1946).

----- [10]: On interpolation by spline functions
and its minimal properties. On Approxima-
tion Theory. Proceedings of Conference in
Oberwolfach, (1963), pp. 109-129. Birkhäu-
ser, Basel (1964).

L e b e n s l a u f

Am 15. November 1939 wurde ich, Friedrich Krinzeßa, als Sohn des Oberregierungsbaurats Friedrich Krinzeßa und seiner Ehefrau Margarete, geb. Glende, in Stuttgart geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule und Mittelschule in Bad Liebenzell war ich von 1952 an Schüler des Kepler-Gymnasiums Pforzheim. Im Frühjahr 1959 bestand ich dort die Reifeprüfung. Dann begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen, wo ich im Juni 1966 die Diplomprüfung in Mathematik ablegte.

Anschließend war ich wissenschaftlicher Angestellter am Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum. In dieser Zeit entstand unter Anleitung von Herrn Professor Dr. H. Ehlich die vorliegende Arbeit "Zur periodischen Spline-Interpolation".

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W. Braunbek, H. Ehlich, H. Kneser, H. Krüger, H. Lenz, G. Möllenstedt, R. Mühleisen, M. Müller, G. Pickert, P. Roquette, H. H. Schaefer, H. Siedentopf, H. G. Tillmann, W. Vogel, H. Wielandt und K. Zeller.

BAMBERGER FOTODRUCK - RUDOLF RODENBUSCH
8600 BAMBERG - Markusplatz 22 - Tel.: 09 51/6 27 94